Método Axiomático e Teorias Formais

#09

Teoria de Grupos

Teoria Informal:

- Temos um conjunto de objetos
- Uma operação binária entre esses objetos que satisfaz algumas propriedades:
  - Associatividade.
  - Existência de um elemento neutro.
  - Existência de inversos.

Teoria Elementar (de 1ª Ordem) de Grupos

Definição 1 – A teoria elementar de grupos é uma teoria de 1ª ordem com igualdade definida da seguinte maneira:

LINGUAGEM

- Símbolos auxiliares, conectivos lógicos, quantificadores universal e existencial, variáveis individuais;
- Uma constante individual a_1;
- Uma letra funcional f_1^2;
- Uma letra predicativa A_1^2.

Teoria Elementar (de 1ª Ordem) de Grupos

Definição 1 – A teoria elementar de grupos é uma teoria de 1ª ordem com igualdade definida da seguinte maneira:

AXIOMAS PRÓPRIOS

(A6) $(\forall x_i)x_i = x_i$

(A7) $x_i = x_j \rightarrow \Big(B(x_i, x_i) \rightarrow B\big(x_i, x_j\big)\Big)$, em que x_i e x_j são variáveis quaisquer, $B(x_i, x_i)$ uma fórmula qualquer e $B\big(x_i, x_j\big)$ é obtida de $B(x_i, x_i)$ substituindo-se alguma ocorrência livre de x_i por x_j, desde que x_j seja livre para x_i em $B(x_i, x_i)$.

Teoria Elementar (de 1ª Ordem) de Grupos

Definição 1 – A teoria elementar de grupos é uma teoria de 1ª ordem com igualdade definida da seguinte maneira:

AXIOMAS PRÓPRIOS

(G1) $(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)A_1^2\left(f_1^2\left(x_i, f_1^2(x_j, x_k)\right), f_1^2(f_1^2(x_i, x_j), x_k)\right)$

Abreviações:

- $x_i = x_j$ abrevia $A_1^2(x_i, x_j)$, $x_i * x_j$ abrevia $f_1^2(x_i, x_j)$, e abrevia a_1

Teoria Elementar (de 1ª Ordem) de Grupos

Definição 1 – A teoria elementar de grupos é uma teoria de 1ª ordem com igualdade definida da seguinte maneira:

AXIOMAS PRÓPRIOS

(G1) $(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)(x_i * (x_j * x_k) = (x_i * x_j) * x_k)$

(G2) $(\forall x_i)(e * x_i = x_i)$

(G3) $(\forall x_i)(\exists x_j)((x_j * x_i) = e)$

Lembrete: Como estamos formalizando a teoria de grupos como uma teoria de primeira ordem, ela possui axiomas lógicos e regras de inferência de uma teoria de primeira ordem.

Grupo e Modelos

Um grupo é um *modelo* para a teoria elementar de grupos.

Modelo: é uma interpretação de uma teoria formal na qual todos os axiomas dessa teoria são verdadeiros.

Exemplo 1:

Uma interpretação I para a nossa teoria elementar de grupos:

- Domínio de interpretação: $D = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Interpretação de a_1: $0 \in \mathbb{Z}$.
- Interpretação de f_1^2: soma entre inteiros.
- Interpretação de A_1^2: igualdade usual entre inteiros.

Grupo e Modelos

A soma entre inteiros é associativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

O número $0 \in \mathbb{Z}$ é o elemento neutro da soma:

$$0 + x = x$$

Para todo inteiro x existe seu inverso:

$$(-x) + x = 0$$

Portanto, a interpretação I é um modelo para a teoria de grupos.

Grupo e Modelos

Exemplo 2:

Uma outra interpretação J para a nossa teoria elementar de grupos:

- Domínio de interpretação: $D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interpretação de a_1: $0 \in \mathbb{N}$.
- Interpretação de f_1^2: soma entre naturais.
- Interpretação de A_1^2: igualdade usual entre naturais.

Grupo e Modelos

A soma entre naturais é associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

O número $0 \in \mathbb{N}$ é o elemento neutro da soma: $0 + x = x$.

Com exceção do 0, nenhum número natural possui inverso aditivo para a soma.

Portanto,

- A interpretação J não é um modelo para a teoria de grupos.
- O axioma **(G3)** é falso nessa interpretação, portanto, é independente dos demais axiomas próprios.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br